

## SN比の基準で性能の良い符号化率 $b/n$ の たたみ込み符号について

福島 荘之介†      山本 博資††

† 電気通信大学 大学院情報システム学研究科  
〒182 東京都調布市調布ヶ丘 1-5-1

†† 東京大学 工学部計数工学科  
〒113 東京都文京区本郷 7-3-1

あらまし      符号化率  $1/n$  のたたみ込み符号に対する誤り率の *Transfer function bounds* を数値計算するアルゴリズム [5] を符号化率  $b/n$  のたたみ込み符号に拡張したアルゴリズムを示す。また、このアルゴリズムと *Dijkstra* の最小自由距離を求めるアルゴリズムを用いて計算機探索を行い、 $(K, b/n) = (2, 2/3), (3, 2/3), (2, 2/5)$  のたたみ込み符号について性能の良い符号を求めた。具体的には、加法的白色ガウス雑音通信路においてビット誤り率 ( $10^{-6}, 10^{-3}$ ) を達成するのに必要な SN比が最小となるような符号を探索している。

和文キーワード      たたみ込み符号

## Good Convolutional Codes for rate $b/n$ based on the criterion of SNR

Sounosuke Fukushima †      Hirosuke Yamamoto ††

† Graduate School of Information Systems,  
The University of Electro-Communications

1-5-1 Chofu-gaoka, Chofu-shi, Tokyo 182, Japan

†† Department of Mathematical Engineering and Information Physics,  
University of Tokyo  
7-3-1 Hongo, Bunkyo-ku, Tokyo 113, Japan

Abstract      The numerical calculation algorithm for the transfer function bounds, which was originally described for  $1/n$  convolutional codes, is extended to  $b/n$  convolutional codes. Furthermore, by using this algorithm and Dijkstra's algorithm to obtain the minimum free distance of a convolutional code, good convolutional codes are searched based on the criterion of minimizing the required signal-noise-ratio for a given bit error probability. Several new good convolutional codes are found for  $(K, n) = (2, 2/3), (3, 2/3), (2, 2/5)$ , where  $K$  is the constraint length of a convolutional code.

英文 key words      convolutional code

## 1 はじめに

たたみ込み符号は、Viterbi 復号アルゴリズムを用いることにより最尤復号を行うことができ、拘束長  $K$  が長くなるにつれて誤り訂正能力が高くなることが知られている。しかし、誤り訂正能力の高いたたみ込み符号を効率良く構成する方法は知られておらず、そのため、性能の良い符号は計算機探索により求められている。これは、基本的には与えられた符号化率 (rate) と拘束長を持つ生成行列の全数探索である。

従来、誤り訂正能力の高いたたみ込み符号の探索には、符号間の最小自由距離  $d_f$  が最大になるものという評価基準が用いられてきた [1][2][3]。しかし、たたみ込み符号の誤り率は  $d_f$  のみにより決まるわけではないので、 $d_f$  が大きいたたみ込み符号が必ずしも最小の誤り率を達成するとは限らない。Lee[4] は、Transfer function bounds を用いて、与えられて誤り率を達成するのに必要な SN 比が最小となる新しいたたみ込み符号を符号化率  $1/n$  に対して求めた。しかしながら、Lee の探索アルゴリズムは時間がかかるため部分探索しか行っておらず、知られていない性能の良いたたみ込み符号が存在する可能性がある。

本稿では、まず符号化率  $1/n$  のたたみ込み符号に対して Transfer function bounds を数値計算するアルゴリズム [5] を、符号化率  $b/n$  の 2 値たたみ込み符号に拡張したアルゴリズムを示す。さらにこのアルゴリズムと Dijkstra 法 [6] を用いた最小自由距離の計算アルゴリズムを使用して、Lee と同様の探索を符号化率  $1/n$  および  $b/n$  のたたみ込み符号に対して行った。本探索によって新たに幾つかの性能の良いたたみ込み符号を見つけることができた。

## 2 符号化率 $b/n$ のたたみ込み符号に対する Transfer function bounds を数値計算するアルゴリズム

たたみ込み符号の誤り率を求める方法として、伝達関数を用いた誤り上界式がある。この伝達関数を求めるには、符号化率が  $1/n$  の場合、 $2^{K-1}$  個の状態変数をもつ状態方程式を解く必要がある。この方法は、 $K$  が大きくなると状態変数の数が指数的に増大するため、一般に誤り上界は数値計算によって求められる。Yamamoto-Fujiwara[5] は、この数値計算を行列の固有値問題と考え、累積法 (Power Method) と状態遷移の規則とを組み合わせることで効率良く計算するアルゴリズムを提案し、符号化率  $1/n$  のたたみ込み符号の場合に対して詳しいアルゴリズムの記述をしている。しかし、文献 [5] ではそのアルゴリズムが一般の符号化率

$b/n$  のたたみ込み符号に拡張可能であると指摘しているものの、詳しいアルゴリズムは記述されていない。そこで本稿ではまず、符号化率が  $b/n$  のたたみ込み符号にも適用できるように一般化した Transfer function bounds の数値計算アルゴリズムを示す。

図 1 に示すような符号化率が  $b/n$  のたたみ込み符号器において、遅延素子の内容をベクトル  $\mathbf{u}_{K-1}\mathbf{u}_{K-2}\cdots\mathbf{u}_1$ 、入力を  $\mathbf{u}_0$  と定義する。ここで、ベクトル  $\mathbf{u}_i$  は、

$$\mathbf{u}_i = (u_{i,0}, u_{i,1}, \dots, u_{i,b-1})^T \quad (1)$$

とし、 $T$  は転置を示す。符号器の生成行列を、

$$\mathbf{G}_b = \begin{pmatrix} g_{0,1}^b & g_{0,2}^b & \cdots & g_{0,n}^b \\ g_{1,1}^b & g_{1,2}^b & \cdots & g_{1,n}^b \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ g_{K-1,1}^b & g_{K-1,2}^b & \cdots & g_{K-1,n}^b \end{pmatrix} \quad (2)$$

と定義すれば、出力  $v_1, v_2, \dots, v_n$  の各ビットは次式となる。ただし、 $\oplus$  および  $\otimes$  は modulo 2 加算を示す。

$$\begin{aligned} v_j &= \sum_{k=0}^{K-1} u_{k,0} g_{k,j}^0 \oplus \sum_{k=0}^{K-1} u_{k,1} g_{k,j}^1 \oplus \cdots \oplus \sum_{k=0}^{K-1} u_{k,b-1} g_{k,j}^{b-1} \\ &= \sum_{i=0}^{b-1} \sum_{k=0}^{K-1} u_{k,i} g_{k,j}^i \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (3)$$

したがって、出力ベクトル  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$  のハミング重みは、 $\mathbf{u}_0, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{K-1}$  の関数となり

$$\begin{aligned} w(\mathbf{u}_{K-1}\mathbf{u}_{K-2}\cdots\mathbf{u}_0) &\triangleq v_1 + v_2 + \cdots + v_n \\ &= \sum_{j=1}^n \sum_{i=0}^{b-1} \sum_{k=0}^{K-1} u_{k,i} g_{k,j}^i \end{aligned} \quad (4)$$

となる。

次に符号器の状態遷移を考える。状態遷移図において状態  $\mathbf{u}_{K-1}\mathbf{u}_{K-2}\cdots\mathbf{u}_0$  に対応したノードを  $\xi_{\mathbf{u}_{K-1}\mathbf{u}_{K-2}\cdots\mathbf{u}_0}$  で表すと、 $\xi_{\mathbf{u}_{K-1}\mathbf{u}_{K-2}\cdots\mathbf{u}_0}$  は、 $\xi_{\mathbf{u}_{K-2}\mathbf{u}_{K-3}\cdots\mathbf{u}_0}$  に接続されている。したがって、整数  $j$  を  $j = (j_{b-1}, j_{b-2}, \dots, j_1, j_0)_2$  と 2 進数表現し、ベクトル  $\mathbf{j}$  を  $\mathbf{j} = (j_0, \dots, j_{b-1})^T$  と定義すれば、状態遷移には

$$\xi_{\mathbf{u}_{K-2}\mathbf{u}_{K-3}\cdots\mathbf{u}_0}^{(l)} := \sum_{j=0}^{2^b-1} D^{w(\mathbf{j}\mathbf{u}_{K-2}\mathbf{u}_{K-3}\cdots\mathbf{u}_0)} \xi_{\mathbf{u}_{K-2}\mathbf{u}_{K-3}\cdots\mathbf{u}_0}^{(l-1)} \quad (5)$$

の関係がある。また、終了ノード  $T(D)$  は、 $\xi_{\mathbf{j}0\cdots0}$  にベクトル  $(0, \dots, 0)^T$  が入力された場合であり、

$$T(D) := \sum_{j=0}^{2^b-1} D^{w(\mathbf{j}0\cdots0)} \xi_{\mathbf{j}0\cdots0} \quad (6)$$

となる。

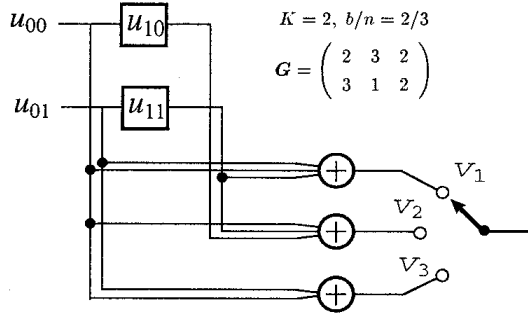


図1 符号化率  $b/n$  のたたみ込み符号器

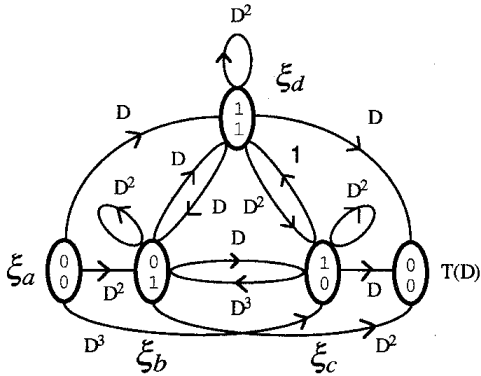


図2 状態遷移図

$\frac{\partial T(D, I)}{\partial I} \Big|_{I=1}$  を求めるアルゴリズムを考える。開始ノードからノード  $a$  および  $b$  への伝達関数をそれぞれ  $T_a(D, I), T_b(D, I)$  として、 $\xi_a, \xi_b, \zeta_a, \zeta_b$  を

$$\xi_a \triangleq T_a(D, I) \Big|_{I=1}, \quad (7)$$

$$\xi_b \triangleq T_b(D, I) \Big|_{I=1}, \quad (8)$$

$$\zeta_a \triangleq \frac{\partial T_a(D, I)}{\partial I} \Big|_{I=1}, \quad (9)$$

$$\zeta_b \triangleq \frac{\partial T_b(D, I)}{\partial I} \Big|_{I=1}. \quad (10)$$

と定義する。  $\xi_a$  と  $\xi_b$  の関係は、

$$\xi_b = D^S I^N \xi_a, \quad (11)$$

となる。また、  $\zeta_a$  と  $\zeta_b$  の関係は、

$$\begin{aligned} \zeta_b &= \frac{\partial T_b(D, I)}{\partial I} \Big|_{I=1} \\ &= \frac{\partial (D^S I^N T_a(D, I))}{\partial I} \Big|_{I=1} \\ &= D^S I^N \frac{\partial T_a(D, I)}{\partial I} \Big|_{I=1} + N D^S T_a(D, I) \Big|_{I=1} \\ &= D^S \zeta_a + N D^S \xi_a. \end{aligned} \quad (12)$$

となる。したがって、符号化率が  $b/n$  の場合には

$$\begin{aligned} \zeta_{\mathbf{u}_{K-2} \cdots \mathbf{u}_0}^{(l)} &:= \sum_{j=0}^{2^b-1} D^{w(j\mathbf{u}_{K-2} \cdots \mathbf{u}_0)} \zeta_{j\mathbf{u}_{K-2} \cdots \mathbf{u}_1}^{(l-1)} \\ &+ N \left[ \sum_{j=0}^{2^b-1} D^{w(j\mathbf{u}_{K-2} \cdots \mathbf{u}_0)} \zeta_{j\mathbf{u}_{K-2} \cdots \mathbf{u}_1}^{(l-1)} \right] \end{aligned}$$

の関係が成り立つ。符号化率が  $1/n$  の場合  $N$  は 1 となるが、符号化率が  $b/n$  の場合は、  $N$  は入力  $\mathbf{u}_0$  のハミング重みとなる。以上から符号化率  $b/n$  のたたみ込み符号器において、  $T(D, I)$  と  $\frac{\partial T(D, I)}{\partial I} \Big|_{I=1}$  を求めるアルゴリズムを次のように記述することができる。

### アルゴリズム 1 [Rates $b/n$ Element wise

#### Power Method for $T(D)$ and $\frac{\partial T(D, I)}{\partial I} \Big|_{I=1}$

#### 1. (Initialization)

•  $\xi_{\mathbf{0} \cdots \mathbf{0}}^{(0)} := 1$ , and let other  $\xi_{\mathbf{u}_{K-1} \mathbf{u}_{K-2} \cdots \mathbf{u}_1}^{(0)}$ 's be zero.

• Let all  $\zeta_{\mathbf{u}_{K-1} \mathbf{u}_{K-2} \cdots \mathbf{u}_1}^{(0)}$ 's be zero.

•  $l := 0$ .

#### 2. repeat

(a)  $l := l + 1$ .

(b)  $\xi_{\mathbf{0} \cdots \mathbf{0}}^{(l)} := \xi_{\mathbf{0} \cdots \mathbf{0}}^{(l-1)}$ ,  $\zeta_{\mathbf{0} \cdots \mathbf{0}}^{(l)} := \zeta_{\mathbf{0} \cdots \mathbf{0}}^{(l-1)}$ .

(c) **for**  $i := 1$  **to**  $2^{K-1} - 1$  **do**

i.  $\mathbf{u}_{K-2} \mathbf{u}_{K-3} \cdots \mathbf{u}_0 := (i)_2^{b(K-1)}$ .

ii.

$$\begin{aligned} \xi_{\mathbf{u}_{K-2} \mathbf{u}_{K-3} \cdots \mathbf{u}_0}^{(l)} &:= \\ D^{w(\mathbf{0} \mathbf{u}_{K-2} \mathbf{u}_{K-3} \cdots \mathbf{u}_0)} &\xi_{\mathbf{0} \mathbf{u}_{K-2} \mathbf{u}_{K-3} \cdots \mathbf{u}_1}^{(l)} \\ + \sum_{j=1}^{2^b-1} D^{w(j\mathbf{u}_{K-2} \mathbf{u}_{K-3} \cdots \mathbf{u}_0)} & \\ \xi_{j\mathbf{u}_{K-2} \mathbf{u}_{K-3} \cdots \mathbf{u}_1}^{(l-1)} & \end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned} \zeta_{\mathbf{u}_{K-2} \mathbf{u}_{K-3} \cdots \mathbf{u}_0}^{(l)} &:= \\ D^{w(\mathbf{0} \mathbf{u}_{K-2} \mathbf{u}_{K-3} \cdots \mathbf{u}_0)} &\zeta_{\mathbf{0} \mathbf{u}_{K-2} \mathbf{u}_{K-3} \cdots \mathbf{u}_1}^{(l)} \\ + \sum_{j=1}^{2^b-1} D^{w(j\mathbf{u}_{K-2} \mathbf{u}_{K-3} \cdots \mathbf{u}_0)} & \\ \zeta_{j\mathbf{u}_{K-2} \mathbf{u}_{K-3} \cdots \mathbf{u}_1}^{(l-1)} & \\ + N [D^{w(\mathbf{0} \mathbf{u}_{K-2} \mathbf{u}_{K-3} \cdots \mathbf{u}_0)} & \\ \xi_{\mathbf{0} \mathbf{u}_{K-2} \mathbf{u}_{K-3} \cdots \mathbf{u}_1}^{(l)} & \\ + \sum_{j=1}^{2^b-1} D^{w(j\mathbf{u}_{K-2} \mathbf{u}_{K-3} \cdots \mathbf{u}_0)} & \\ \zeta_{j\mathbf{u}_{K-2} \mathbf{u}_{K-3} \cdots \mathbf{u}_1}^{(l-1)} &] \end{aligned}$$

**until** sufficient accuracy is achieved.

#### 3.

$$T(D) := \sum_{j=0}^{2^b-1} D^{w(j\mathbf{0} \cdots \mathbf{0}\mathbf{0})} \xi_{j\mathbf{0} \cdots \mathbf{0}}$$

$$\frac{\partial T(D, I)}{\partial I} \Big|_{I=1} := \sum_{j=0}^{2^b-1} D^{w(j\mathbf{0} \cdots \mathbf{0}\mathbf{0})} \zeta_{j\mathbf{0} \cdots \mathbf{0}}$$

ただし, (c)i. の  $(i)_2^{b(K-1)}$  は, 整数  $i$  の  $b(K-1)$  桁の 2 進数表現を表す.

符号化率  $1/n$  の場合と同様に, 2.(c)ii.,iii. を以下のように変形とすることで収束の速度を上げることができる.

ii.

$$\begin{aligned} \xi_{\mathbf{u}_{K-2}\mathbf{u}_{K-3}\cdots\mathbf{u}_0}^{(l)} := & D^{w(\mathbf{0}\mathbf{u}_{K-2}\mathbf{u}_{K-3}\cdots\mathbf{u}_0)} \xi_{\mathbf{0}\mathbf{u}_{K-2}\mathbf{u}_{K-3}\cdots\mathbf{u}_1}^{(l)} \\ & + \sum_{j=1}^{2^b-1} D^{w(\mathbf{j}\mathbf{u}_{K-2}\mathbf{u}_{K-3}\cdots\mathbf{u}_0)} \xi_{\mathbf{j}\mathbf{u}_{K-2}\mathbf{u}_{K-3}\cdots\mathbf{u}_1}^{(l-1)} \end{aligned}$$

iii.

$$\begin{aligned} \zeta_{\mathbf{u}_{K-2}\mathbf{u}_{K-3}\cdots\mathbf{u}_0}^{(l)} := & D^{w(\mathbf{0}\mathbf{u}_{K-2}\mathbf{u}_{K-3}\cdots\mathbf{u}_0)} \zeta_{\mathbf{0}\mathbf{u}_{K-2}\mathbf{u}_{K-3}\cdots\mathbf{u}_1}^{(l)} \\ & + \sum_{j=1}^{2^b-1} D^{w(\mathbf{j}\mathbf{u}_{K-2}\mathbf{u}_{K-3}\cdots\mathbf{u}_0)} \zeta_{\mathbf{j}\mathbf{u}_{K-2}\mathbf{u}_{K-3}\cdots\mathbf{u}_1}^{(l-1)} \\ & + N [ D^{w(\mathbf{0}\mathbf{u}_{K-2}\mathbf{u}_{K-3}\cdots\mathbf{u}_0)} \zeta_{\mathbf{0}\mathbf{u}_{K-2}\mathbf{u}_{K-3}\cdots\mathbf{u}_1}^{(l)} \\ & + \sum_{j=1}^{2^b-1} D^{w(\mathbf{j}\mathbf{u}_{K-2}\mathbf{u}_{K-3}\cdots\mathbf{u}_0)} \zeta_{\mathbf{j}\mathbf{u}_{K-2}\mathbf{u}_{K-3}\cdots\mathbf{u}_1}^{(l-1)} ] \end{aligned}$$

### 3 設計ビット誤り率において, $E_b/N_o$ を最小にする生成行列の計算機探索

符号化率  $b/n$  のたたみ込み符号の事象誤り率  $P_e$  とビット誤り率  $P_b$  の誤り上界式は, 加法的白色ガウス雑音通信路 (AWGN) において,

$$P_e \leq Q \left( \sqrt{\frac{2d_f E_s}{N_o}} \right) e^{d_f E_s/N_o} T(D, I) \Big|_{I=1, D=e^{-E_s/N_o}} \quad (13)$$

$$P_b \leq \frac{1}{b} Q \left( \sqrt{\frac{2d_f E_s}{N_o}} \right) e^{d_f E_s/N_o} \frac{\partial T(D, I)}{\partial I} \Big|_{I=1, D=e^{-E_s/N_o}} \quad (14)$$

となることが知られている. ここで  $E_s/N_o$  は, チャンネルシンボル当たりの SN 比であり  $(b/n) E_b/N_o$  とも書ける.  $E_b/N_o$  は情報源 1 ビット当たりのエネルギーと片側雑音電力密度の比であり, チャンネルに依存する. このうち,  $P_b$  は, Viterbi 復号で復号されたビットの誤り率であり, 重要で実用的な尺度である.

式(14)を用いて, 計算機により最良生成行列  $\mathbf{G}$  の探索を行った. この手法 [4] は, ビット誤り率  $P_b$  の設計値を  $10^{-6}$  と  $10^{-3}$  と仮定し, 要求される  $E_b/N_o$  を最小にする  $\mathbf{G}$  を探索するものである. 本探索は, 基本的に  $\mathbf{G}$  をカウントアップで逐次作成する全数探索であるが, 以下の手順でカタストロフィックな  $\mathbf{G}$  の除去と,  $d_f$  の小さい生成行列の除去を行った.

(i) 拘束長  $K$ , 符号化率  $b/n$ , 設計ビット誤り率  $P_b$ , 探索を行う最小の  $d_f$  を決める.

(ii) 生成行列  $\mathbf{G}$  をカウントアップにより更新.

(iii)  $\mathbf{G}$  がカタストロフィックかどうか判定. - カタストロフィックなら (ii) に戻る.

(iv)  $\mathbf{G}$  の  $d_f$  を求め, 最小の  $d_f$  と比較 - 最小の  $d_f$  より小さければ (ii) に戻る.

(v) 2分探索法により,  $E_b/N_o$  の最小値と最大値を与え, 設計ビット誤り率に収束する  $E_b/N_o$  を求める.

(vi) この  $E_b/N_o$  が以前のものより小さければ,  $\mathbf{G}$  を保存.

(vii) (ii) に戻る.

カタストロフィックな生成行列とは, 有限個の誤りであっても情報系列に無限個の誤りが生じてしまう「誤り伝搬」を生じ得る生成行列である. この判定には, 以下の定理を用いる.

定理 1 [7, 定理 11.1] 符号化率  $b/n$  のたたみ込み符号の生成行列  $\mathbf{G}$  が基本生成行列である必要十分条件は,  $\mathbf{G}$  の  $n C_b$  個の  $b \times b$  小行列の行列式  $\Delta_i$  で  $\Delta_i \neq 0$  となるものの最大公約多項式が定数となることである. ■

定理 2 [7, 定理 11.2] 生成行列がカタストロフィックにならないための必要十分条件は, その生成行列が基本生成行列であることである. ■

(iv) の  $d_f$  の最小値は, 無駄な探索を減らすためのもので, 従来知られている最大の  $d_f[3]$  から 1 を減じた値を用いた.

### 4 探索結果

前節の手法を使い, 符号化率が  $1/n$  のたたみ込み符号の探索を行った. この結果, 文献 [4] と同様の結果を得ることができた. さらに,  $(K, 1/n)$  が  $(3, 1/3)$ ,  $(3, 1/5)$ ,  $(3, 1/7)$ ,  $(3, 1/8)$ ,  $(7, 1/2)$  で設計ビット誤り率を  $10^{-3}$  とする場合については, 文献 [4] より良い符号が求まった. これは, 文献 [4] の探索手法が特殊な部分探索を用いているためであ

と考えられる。前節の手法は、特定の $d_f$ 値以上の全数探索であるため部分探索で探索されなかった符号が見つかったわけである。この結果を表1に示す。

次に符号化率が $b/n$ のたたみ込み符号を $(K, b/n)$ が $(2,2/3), (3,2/3), (2,2/5)$ で探索した。この結果、同じビット誤り率 $P_b$ を達成するのに必要な $E_b/N_0$ が、従来の符号[3]よりも小さい良い符号を求めることができた。探索によって求めた符号は、従来の符号と比べ0.1~0.3dB利得が高い。この結果を従来の符号[3]と比較し、表2に示す。また、新しい符号の $E_b/N_0$ 対ビット誤り率のグラフを図3~図5に示す。

表1 符号化率 $1/n$ の新しいたたみ込み符号と従来の符号

K	Rates 1/n	G (octal)	Required $E_b/N_0$		$d_f$	Note
			1.E-6	1.E-3		
3	2	7 5	6.706	4.027	5	1,a,b,*a(3),*b(3)
3	3	7 7 5	6.736	4.140	8	1,a,b,*a(6)
3	3	7 6 5	7.007	4.134	7	5,*b(6)
3	4	7 7 7 5	6.938	4.345	10	2
3	4	7 7 5 5	6.706	4.027	10	4,a,b,*a(9),*b(9)
3	5	7 7 7 5 5	6.669	4.055	13	3,a,b,*a(11)
3	5	7 7 6 5 5	6.859	4.016	12	5,*b(11)
3	6	7 7 7 7 5 5	6.736	4.141	16	3
3	6	7 7 7 5 5 5	6.706	4.027	15	4,a,b,*a(13)
3	6	7 7 6 5 5 5	6.917	4.023	14	5,*b(13)
3	7	7 7 7 7 5 5 5	6.665	4.036	18	3,a,b,*a(17)
3	7	7 7 7 6 5 5 5	6.805	3.992	17	5,*b(17)
3	8	7 7 7 7 5 5 5 5	6.686	4.081	21	3,a,*a(19)
3	8	7 7 7 7 5 5 5 5	6.706	4.027	20	4,b
3	8	7 7 7 6 5 5 5 5	6.856	4.005	19	5,*b(19)
4	2	17 15	6.180	3.735	6	1,a,b,*a(4),*b(4)
4	3	17 15 13	5.959	3.437	10	1,a,*a(8)
4	3	17 15 11	5.995	3.427	9	4,b,*b(8)
4	4	17 15 15 13	6.004	3.511	13	2
4	4	17 15 13 11	5.906	3.286	12	4,a,b,*a(11),*b(11)
4	5	17 17 15 15 13	5.992	3.483	16	3
4	5	17 15 15 13 11	5.909	3.333	15	4,a,b,*a(14),*b(14)
4	6	17 17 15 15 13 13	5.959	3.437	20	3
4	6	17 17 15 15 13 11	5.865	3.325	19	4,a,b,*a(18),*b(18)
4	7	17 17 15 15 15 13 13	5.974	3.462	23	3
4	7	17 17 15 15 13 13 11	5.849	3.306	22	4,a,b
5	2	35 23	5.745	3.495	7	1,a,*a(5)
5	2	31 23	5.846	3.430	6	4,b,*b(5)
5	3	37 33 25	5.395	3.115	12	1,a,b,*a(11),*b(11)
5	4	37 35 33 25	5.304	3.000	16	2
5	4	37 35 25 23	5.299	3.000	15	4,a,*a(13)
5	4	35 31 27 23	5.317	2.965	14	4,b,*b(13)
6	2	75 53	5.310	3.290	8	1
6	2	77 45	5.238	3.238	8	4,a
6	2	75 57	5.294	3.211	8	4,b,*b(7)
6	2	77 51	5.238	3.238	8	4,*a(7)
6	3	75 53 47	4.918	2.901	13	1,a,*a(11)
6	3	75 67 41	5.034	2.854	12	4,b,*b(11)
7	2	171 133	4.802	3.037	10	1,a,*a(8)
7	2	161 133	4.819	3.035	9	4,b
7	2	177 135	5.057	3.021	8	5,*b(8)

- 1: Found by Odenwalder[1]
- 2: Found by Larsen [2]
- 3: Found by Daut, et al. [3]
- 4: Found by Lee [4]
- a: Minimizes required  $E_b/N_0$  for desired BER  $\leq 1.E-6$  by partial search [4]
- b: Minimizes required  $E_b/N_0$  for desired BER  $\leq 1.E-3$  by partial search [4]
- 5: Found by the author
- \*a(n): Minimizes required  $E_b/N_0$  for desired BER  $\leq 1.E-6$  by total search
- \*b(n): Minimizes required  $E_b/N_0$  for desired BER  $\leq 1.E-3$  by total search

$d_f$  is searched for  $d_f \geq n$ .

表2 符号化率 $b/n$ の新しいたたみ込み符号と従来の符号

Rates b/n	K	G (octal)	Required $E_b/N_0$		$d_f$ (Limit)	Time	Note
			1.E-6	1.E-3			
2/3	2	3 2 3	7.571	4.645	3	0.1H	by Daut(1982)
		3 1 2					
		3 3 2					
	3	0 1 3	6.169	4.029	5	29H	*a by the author
		7 7 4					
		1 6 7					
2/5	2	7 5 2	7.011	4.103	6	24.5H	*a by the author
		6 1 5					
		7 7 2					
	3	7 2 5	6.703	3.988	6	25.5H	*b by the author
		3 3 1 0 2					
		3 1 2 3 0					
3	3 3 0 3 2	6.800	3.988	6	25.5H	*b by the author	
	3 0 3 1 2						
	3 3 0 2 1						
3	2 0 3 1 3						

1. \*a: Minimizes required  $E_b/N_0$  for desired BER  $\leq 1.0E-6$
2. \*b: Minimizes required  $E_b/N_0$  for desired BER  $\leq 1.0E-3$
3. Time is CPU time on EWS(37Mips).

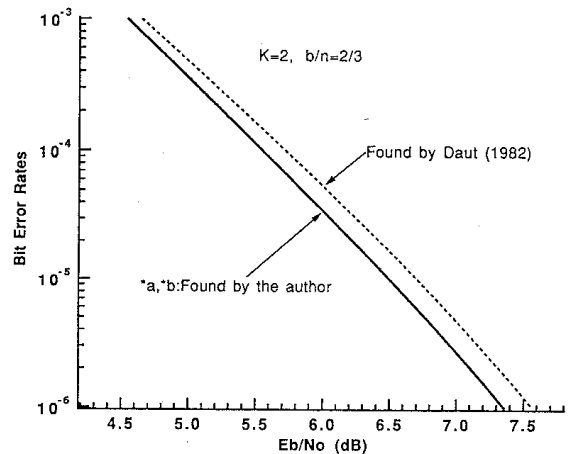


図3 新しいたたみ込み符号  $K=2, b/n=2/3$  の  $E_b/N_0$  対ビット誤り率

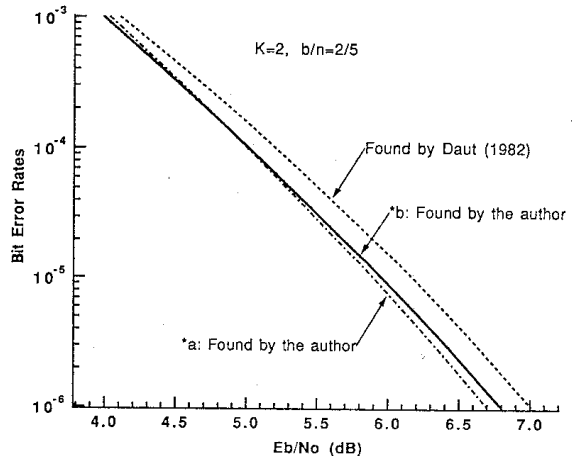


図4 新しいたたみ込み符号  $K=2, b/n=2/5$  の  $E_b/N_0$  対ビット誤り率

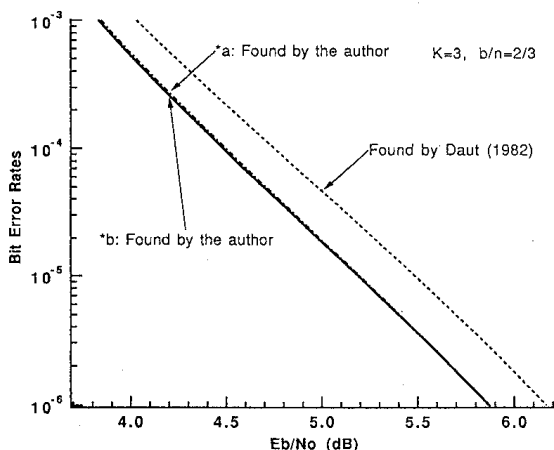


図5 新しいたたみ込み符号  $K=3, b/n=2/3$  の  $E_b/N_0$  対ビット誤り率

作成した探索用のプログラムは、計算機の手速と十分な時間があれば、 $b \times n \times K \leq 31$  までの  $b/n$  符号を探索できる。しかし、 $(2/3, 4)$  の計算時間は、公称 37Mips の EWS (Engineering Work Station) を使用して、およそ 1500 時間と予想される。このため、本手法では  $b \times n \times K$  がこれ以上の符号の探索は現実的でない。

## 5 まとめ

符号化率  $1/n$  のたたみ込み符号において、Transfer function bounds を数値計算するアルゴリズム [5] を拡張し、符号化率  $b/n$  における数値計算アルゴリズムを示した。また、最小自由距離  $d_f$  の計算に Dijkstra 法 [6] を適用した。これらの手法を用いて、加法的白色ガウス雑音通信路 (AWGN) において与えられた誤り率を達成するのに必要な SN 比が最小となる、符号化率  $b/n$  のたたみ込み符号を計算機探索した。この結果、従来報告されていたたたみ込み符号 [3] に比べ利得の高い符号を、拘束長の短い範囲で新たに発見することができた。このうち最も利得の高いものは、 $K=2, b/n=2/5$ 、設計ビット誤り率  $P_b = 10^{-6}$  の場合であり、従来知られていた符号に比べ 0.3dB 利得が高い。本探索は、基本的に全数探索であるため、計算機の手速と計算時間を要し、探索の範囲は  $(K, b/n) = (2, 2/3)(3, 2/3)(2, 2/5)$  に限られた。今後の課題は、計算時間の短縮であり、生成行列の探索数を少なくする手法と提案のアルゴリズムを組み合わせることにより、探索の範囲を広げることが可能である。

## 参考文献

- [1] J. P. Odenwaldr, "Optimal decoding of convolutional codes," ph. D. dissertation, Dep. Syst. Sci., Univ. California, Los Angeles, 1970.
- [2] K. L. Larsen, "Short convolutional codes with maximal free distance for rates  $1/2$ ,  $1/3$ , and  $1/4$ ," *IEEE Trans. Inform. Theory*, Vol. IT-19, No. 3, pp. 371-372, May 1973.
- [3] D. G. Daut, J. W. Modestino, and L. D. Wismer, "New short constraint length convolutional code constructions for selected rational rates," *IEEE Trans. Inform. Theory*, Vol. IT-28, No. 5, pp. 794-800, Sept. 1982.
- [4] P. J. Lee, "New Short Constraint Length, Rate  $1/N$  Convolutional Codes Which Minimize the Required SNR for Given Desired Bit Error Rates," *IEEE Trans. Commun.*, Vol. COM-33, No. 2, pp. 171-177, Feb. 1985.
- [5] H. Yamamoto and H. Fujiwara, "Numerical Calculation Algorithm for Transfer Function Bounds of Convolutional Codes and TCM Schemes," 信学技報, Vol. IT-91-114, pp. 73-79, Mar. 1992.
- [6] E. W. Dijkstra, "A note on two problems in connexion with graphs," *Numerische Mathematik*, 1, pp. 269-271, 1959.
- [7] 今井, "符号理論," 電子情報通信学会編, pp. 247-312, 1990.